ELECTRICITE

Cours Destiné aux Etudiants de La Filière SMP-SMC S2

M.B. SEDRA

Professeur, Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail,
Kenitra, Maroc

Edition Mars 2012

Chapter 1

Notions de base

1.1 Champ Scalaire, Champ Vectoriel

1.1.1 Définition d'un champ

On parle d'un champ d'une grandeur lorsqu'on peut définir cette grandeur en tout point M d'une région donnée de l'espace.

Exemple

- Champ de température
- Chmap de pesanteur
- Champ de vitesse
- etc...

1.1.2 Champ scalaire

Soit f une grandeur scalaire (température, pression,...). L'ensemble des valeurs $f(M)$ fonctions du point M d'une région de l'espace constitue un champ scalaire de la fonction f.

Propriétés

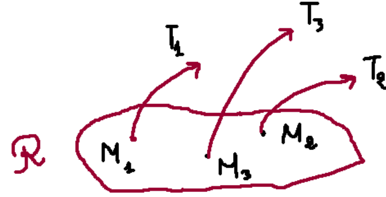
- Le champ scalaire f est uniforme si f est une constante en tout point M de la région de l'espace considéré.

- Le champ f est est permanent s'il est indépendant du temps $f(x, y, z)$

Exemple:

La donnée des températures $T_1, T_2, T_3, \ldots$ associées aux points $M_1, M_2, M_3, \ldots$ de la région (voir figure ci-dessous) définit un champ de température. C'est

un champ scalaire.



1.1.3 Champ Vectoriel:

Soit $\overrightarrow{V}$ une grandeur physique vectorielle, alors l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{V}(M)$ associés à chaque point M d'une région donnée de l'espace, forme ce qu'on appelle un champ vectoriel.

Propriétés:

- $\overrightarrow{V}$ est uniforme si la grandeur vetorielle a le même module, la même direction et le même sens en tout point M de la région de l'espace.

- Un champ vectoriel est radial si le support du vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ passe par un point fixe O et ceci quelque soit le point M de la région considérée.

Exemples:

■ Champ de vitesses
■ Champ d'accélération
■ Champ de pesanteur

1.2 Systèmes de coordonnées

1.2.1 Vecteur position

Soit un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ et soit M un point de coordonnées x, y, z. la quantité suivante

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

est le vecteur position noté aussi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$. On peut associer à ce point M un champ de vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ d'origine M, de composantes X, Y, Z. On obtient

alors une fonction de point à valeur vectorielle

$$\overrightarrow{V}(M) = \begin{pmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Comme signalé précédement, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{V}(M)$ constitue un champ de vecteurs dont un exemple est donné par le champ magnétique terrestre.

1.2.2 Coordonnées cartésiennes

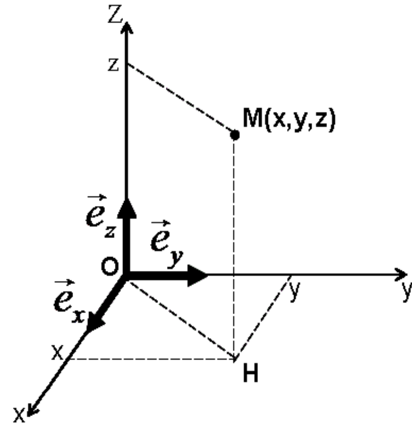
$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Si le point M subit un déplacement, on aura:

$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\left(d\overrightarrow{OM}\right)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$



1.2.3 Coordonnées cylindriques

Pour une géométrie cymindrique, la base des vecteurs unitaires est donnée par les trois vecteurs[1]: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$.On définit M par ses trois coordonnées r, θ et z où r, θ sont les coordonnées polaires.

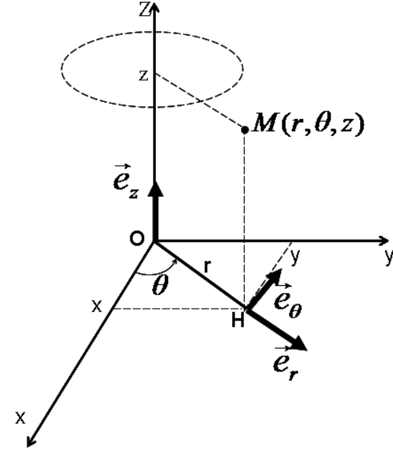
[1]On peut aussi utiliser la notation $(\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}\varphi, \overrightarrow{e}_z)$ pour les coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2 + z^2$$

$$\left(d\overrightarrow{OM}\right)^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + dz^2$$



1.2.4 Coordonnées sphériques

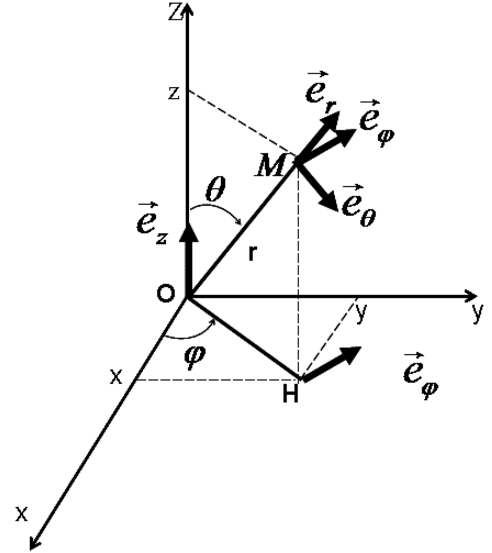
Pour une forme sphérique, la base des vecteurs unitaires est donnée par les trois vecteurs: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$, $\overrightarrow{e}_\varphi$. On définit dans ce cas M par les trois coordonnées r, φ et θ,On a

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e}_\varphi + rd\theta\vec{e}_\theta$$

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)^2 = r^2$$

$$\left(d\overrightarrow{OM}\right)^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$



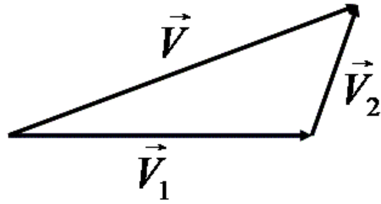
1.3 Opérations sur les vecteurs

1.3.1 Somme de vecteurs

La somme $\vec{V}$ de deux vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ est donnée par: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

Si $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

alors $\vec{V} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$



1.3.2 Produit scalaire

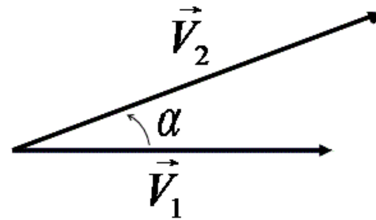
Le produit scalaire de deux vecteurs

est donné par la quantité scalaire $S = \vec{V}_1 . \vec{V}_2$

Par définition:

$$S = V_1 V_2 \cos\alpha$$

où l'angle α est défini par $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.



Déduction:

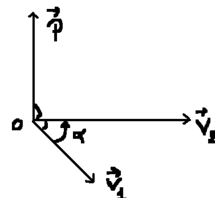
- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul, car $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ on a

$$\vec{e}_x.\vec{e}_y = \vec{e}_y.\vec{e}_z = \vec{e}_z.\vec{e}_x = 0 \quad (1.3)$$
$$\vec{e}_x.\vec{e}_x = \vec{e}_y.\vec{e}_y = \vec{e}_z.\vec{e}_z = 1 \quad (1.4)$$

Expression cartésienne du produit scalaire

$$S = (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z)\cdot\ (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

1.3.3 Produit vectoriel



$\vec{P} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Par définition, $\vec{P}$ est un vecteur

- perpendiculaire au plan $(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$,
- orienté de telle sorte que le trièdre $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{P}$ soit direct,
- de norme $V_1V_2\,|sin\alpha|$ où $\alpha = (\vec{V}_1,\vec{V}_2)$.

Remarque

- Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul, car $\alpha = 0$.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, on a

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x &= \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0} \\ \|\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y\| &= \|\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z\| = \|\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x\| = 1 \end{aligned}$$

Expression cartésienne du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z) \wedge (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z) \\ &= (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\vec{e}_x + (X_2Z_1 - X_1Z_2)\vec{e}_y + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\vec{e}_z \end{aligned}$$

1.4 Opérateurs différentiels

1.4.1 Gradient

Définition:

Le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est un champ vectoriel noté $\overrightarrow{grad}$ f (ou encore $\overrightarrow{\nabla} f$, avec $\overrightarrow{\nabla}$ l'opérateur vectoriel polaire nabla). L'opérateur $\overrightarrow{grad}\ f$ associe à une fonction scalaire $f(x, y, z)$ un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Exemple:

Trouver l'opérateur vecteur gradient du champ scalaire

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y + xyz$$

Réponse:

$$\overrightarrow{grad}\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + yz \\ 2 + xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Remarque:
Le vecteur gradient dépend du point $M(x,y,z)$

Variation d'un champ scalaire:

Soit $f(x,y,z,t)$, où t est le paramètre temps. La variation totale de la fonction $f(x,y,z)$ en fonction des variations dx, dy, dz et dt est donnée par

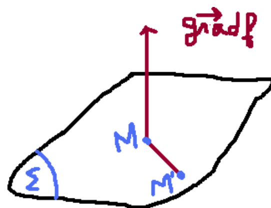
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{1.5}$$

On remarque que la quantité $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ n'est autre que le produit sclaire $\left(\overrightarrow{grad}f\right).\overrightarrow{dM}$. On en déduit alors la relation

$$df = \left(\overrightarrow{grad}f\right).\overrightarrow{dM} + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{1.6}$$

Remarque:
Si la fonction f ne depend pas du paramètre t, alors

$$df = \left(\overrightarrow{grad}f\right).\overrightarrow{dM} \tag{1.7}$$



Aspect Géométrique

Soit le gradient d'une fonction scalaire $\overrightarrow{grad} f$,

Définition: Surface de niveau

Une surface de niveau $\sum$ est toute surface pour laquelle la fonction f est une constante.

$$f(x, y, z) = cte.$$

Proposition: direction du gradient

Le gradient d'une fonction f sur une surface de niveau $\sum$ en un point M est un vecteur perpendiculaire à cette surface.

Démonstration:

Sur $\sum$ une surface de niveau, la fonction f est une constante. Ceci correspond à écrire $df = 0$.

Pour toute fonction $f(x, y, z) = const.$, et pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a:

$$df = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right) . \overrightarrow{dM} = 0$$

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est normal à la surface de niveau: $\overrightarrow{\text{grad}} f \perp \sum$.**Proposition: Sens du gradient :**

Le gradient donne la direction le long de laquelle le champ varie le plus. Il est dirigé dans le sens des fonctions f croissantes.

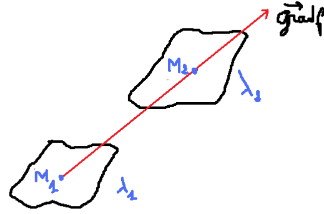
Démonstration:

Soit $df = \overrightarrow{grad} f . \overrightarrow{dM} = \left\| \overrightarrow{grad} f \right\| . \left\| \overrightarrow{dM} \right\| . \cos\theta$

avec $\theta = (\widehat{\overrightarrow{grad} f, \overrightarrow{dM}})$.

df est maximal si $\cos\theta = 1$ càd si $\overrightarrow{grad} f \; // \; \overrightarrow{dM}$

Le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.



Expressions de $\overrightarrow{grad}f$ dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes : $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques : $f = f(r, \theta, z)$

Soit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_r\vec{e}_r + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_\theta\vec{e}_\theta + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{dM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

Ceci donne:

$$df = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f.\overrightarrow{dM}\right) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_r dr + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_\theta rd\theta + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)_z dz$$

or

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Par identification on aura

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

Coordonnées sphériques: $f = f(r, \theta, \varphi)$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)}$$

1.4.2 Divergence

L'opérateur div (ou encore $\vec{\nabla}.$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur

$$\operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} \quad \text{(scalaire)} \tag{1.8}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

Exemple:
Soit le vecteur position

$$\overrightarrow{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

on a

$$\operatorname{div}\overrightarrow{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Coordonnées cylindriques :
On montre que div $\overrightarrow{V}$ peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\,(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

Coordonnées sphériques :
Une expression simplifiée de div $\overrightarrow{V}$ est donnée par :

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(V_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi},$$

Divergence et flux d'un vecteur :

Par définition, la différentielle du flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est reliée à la divergence de $\vec{V}$ par :

$$d\Phi = \text{div}\,\overrightarrow{V}\,d\tau$$

où $d\tau$ représente un volume élémentaire : la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unité de volume.

On en déduit :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(\tau)} \text{div}\,\vec{V}\,d\tau$$

Cette formule, dite de **Green-Ostrogradsky** (sera traitée ultérieurement) facilite le calcul du flux d'un vecteur à travers une surface fermée.

1.4.3 Rotationnel

C'est un opérateur qui transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel. L'opérateur $\overrightarrow{rot}$ (ou encore $\vec{\nabla}\wedge$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\,(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

Coordonnées sphériques :

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial \sin\theta V_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right]$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV_\varphi\right)}{\partial r}$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}\right)_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]$$

Exemple:
Soit le vecteur position

$$\overrightarrow{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

on a

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4.4 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.9)$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou vectorielle:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{V} &= \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2} \\ &= \left(\Delta V_x\right)\vec{e}_x + \left(\Delta V_y\right)\vec{e}_y + \left(\Delta V_z\right)\vec{e}_z \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\Delta r^2 &= \Delta(x^2+y^2+z^2)\\ &= \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z^2}{\partial z^2}\\ &= 6\end{aligned}$$

1.4.5 Relations Utiles

Produit mixte: $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{C}\wedge\vec{A})$

Double produit vectoriel: $\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C} = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

f et p étant des fonctions scalaires, on a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(fp) &= f\overrightarrow{\text{grad}}p + p\overrightarrow{\text{grad}}f\\ \text{div}(f\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(f).\vec{A} + f\,\text{div}\,\vec{A}\\ \text{div}(A\wedge B) &= \vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A}.\overrightarrow{rot}(\vec{B})\\ \overrightarrow{rot}(f.\vec{A}) &= \left(\overrightarrow{\text{grad}}f\right)\wedge\vec{A} + f\overrightarrow{rot}(\vec{A})\\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}f) &= \Delta f\\ \text{div}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) &= 0\\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}f) &= \vec{0}\\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}\end{aligned}$$

Remarques

Dans ce qui suit des remarques importantes concernant quelques aspects physiques engageant les différents opérateurs (le rotationnel, le gradient et la divergence).

1) Equations de Maxwell

Nous allons voir dans le cours d'électricité 2, qu'un un champ électromagnétique de la physique classique, est caractérisé par deux types de champs de vecteurs $\vec{E}(r,t)$ et $\vec{B}(r,t)$. Se sont le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ et magnétique $\vec{B}(r,t)$ qui obéissent à des équations très spéciales (dites de de Maxwell) à savoir

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{E} &= 0 \\
\mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \\
\overrightarrow{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\overrightarrow{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

En effet étant donné que :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{a}\right) - \Delta.\vec{a}$$

On obtient à partir de (3) et (4)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \Delta.\vec{E} &= -\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) \\
&= -\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ainsi que

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2) Arbitraire des Potentiels

Le champ $\vec{E}$ électrique se dérive d'un potentiel scalaire V. En effet

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Cette formule montre que V donnant lieu au champ életrique $\vec{E}$ n'est pas unique, car

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}V \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V+V_0) \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}V'\end{aligned}$$

Donc V et V' donnent le même champ électrique $\vec{E}$. Ceci montre que le potentiel scalaire V fait appel à un arbitraire qui disparait qu'on on passe à la ddp (différentielle de potentiel)

$$\begin{aligned}ddp &= V' - V \\ &= V_0\end{aligned}$$

Le champ magnétique, contrairement au champ électrique, se dérive d'un autre potentiel $\vec{A}$ de nature vectorielle. En effet, la quantité

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

signifie aussi que le potentiel

$$\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \vec{\nabla}\chi$$

donne lieu au même champ magnétique $\vec{B}$ car $\vec{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{A} + \vec{\nabla}\chi\right) = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$ puisque $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\chi = \overrightarrow{0}$. Ceci montre, par analogie avec le champ électrique $\overrightarrow{E}$, que le champ magnétique correspond aussi à des potentiels vecteurs définis à un arbitraire près.

3) La divergence

Il est facile de voir que div $\vec{B} = 0$ (du fait que div$(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{0}$)

Nous verrons plus tard que la divergence est liée (via le théorème de Green Ostrogradsky) à la notion de flux ou source de la densité de charge.

1.5 Transformations intégrales

Théorème de Stokes (ou du rotationnel) :

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{A}.\overrightarrow{dS} \quad \text{[(S) s'appuie sur (C)]} \tag{1.10}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) :

$$\oint\oint_{S \text{ fermée}} \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(\tau)} \text{div}\,\vec{A}.d\tau \tag{1.11}$$

[(τ) volume englobé par (S)]
Formule du gradient :

$$\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{grad}} f d\tau = \iint_{(S)} f\overrightarrow{dS} \tag{1.12}$$

Chapter 2

Théorèmes Fondamentaux

2.1 Flux à travers une surface

Définition

Le flux élémentaire $d\Phi$ d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers un élément de surface $\overrightarrow{dS}$ est le scalaire

$$d\Phi = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS}$$

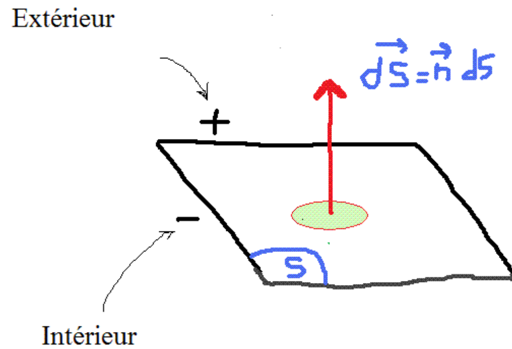
Le flux du vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface finie $\sum$ s'exprime par l'intégralle de surface

$$\Phi = \iint_{\sum} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS}$$

Le flux du vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface fermée S est donné par

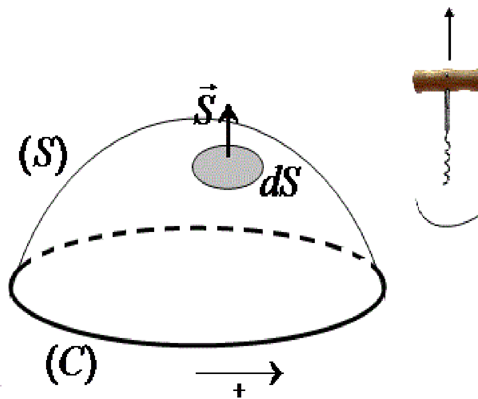
$$\Phi = \iint_{S} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS}$$

Orientation d'une surface:



Contour C

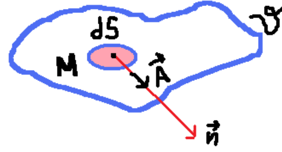
Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S). Une fois (C) orienté, le sens du vecteur unitaire $\vec{N}$ est défini par la règle du tire bouchon (sens dans lequel avance le tire bouchon quand on le tourne dans le sens positif choisi sur (C))



Exemple d'application:

Soit une sphère de centre O et derayon r. Calculer le flux du vecteur $\overrightarrow{A}(M) = exp(-\frac{r^2}{2})\overrightarrow{e}_r$ à travers cette sphère

Réponse:



Comme $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{N} dS$ et $\overrightarrow{N} \equiv \overrightarrow{e_r}$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} \\
&= \iint_S \overrightarrow{A}\overrightarrow{N} dS \\
&= exp(\frac{r^2}{2}) r^2 \iint_S \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= 4\pi r^2 exp(-\frac{r^2}{2})
\end{aligned}$$

avec $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. La fonction $exp(-\frac{r^2}{2})$ est constante quand on se déplace sur la
sphère.

2.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Soit une surface fermée S quelconque englobant un volume v à l'ntérieur duquel se trouve défini un champ de vecteurs $\vec{A}$.Le théorème de GO est donné par le résultat suivant

$$\oint\oint_{S \text{ fermée}} \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(v)} \operatorname{div} \vec{A}.dv$$

le volume (v) est englobé par la surface (S)

Enoncé:

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sortant d'une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence $\operatorname{div}\vec{A}$, étendue au volume délimité par (S)

2.3 Théorème de Stokes-Ampère

2.3.1 Définition

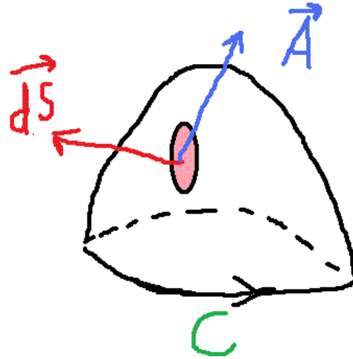
Le théorème de GO permet de passer d'une intégrale triple définie sur un volume v à une intégrale double étendue sur une surface S délimitant un volume (v)

Une formule analogue permet de transformer une intégrale double étendue à une surface $\sum$ ouverte en une intégrale simple étendue au contour (C) sur lequel s'appuie $\sum$. Cette formule traduit mathématiquement le théorème de Stokes-Ampère

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_{\sum} \overrightarrow{rot}\vec{A}.\overrightarrow{dS} \tag{2.1}$$

2.3.2 Enoncé

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'un contour (C) est égale au flux du rotatonnel de ce champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface (S) s'appuyant sur (C)



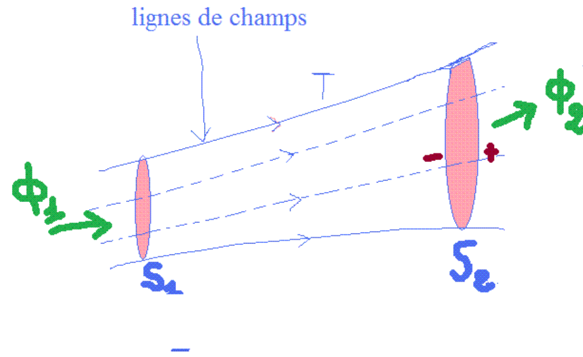
2.3.3 Champ à flux conservataif

Un champ est dit à flux conservatif dans un domaine D de l'espace si son flux à travers toute surface S fermée appartenant à D est nul

$$\forall S \in D, \Phi = \oint\oint_S \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = 0 \tag{2.2}$$

Illustration

Considérons la surface fermée constituée d'un tube de champ T et de deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur deux contours, de même oreientations, tracés sur T et soient les flux Φ_1 et Φ_2 d'un champ à flux conservatf respectivement à travers S_1 et S_2.



$$\Phi = \oint \oint_T \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} + \oint \oint_{S_1} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} + \oint \oint_{S_2} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = 0$$

Comme $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{dS}$ sur le tube T, on $\oint \oint_T \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = 0$. Ceci entraine

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

2.3.4 Formules Utiles

Formule du gradient :

$$\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{grad}} f d\tau = \iint_{(S)} f\overrightarrow{dS} \tag{2.3}$$

Formule du rotationnel :

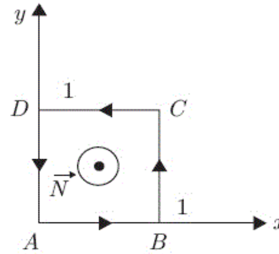
$$\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{rot}\vec{A} d\tau = \iint_{(S)} \overrightarrow{dS} \wedge \overrightarrow{A} \tag{2.4}$$

2.3.5 Application

Soit le champ vectoriel

$$\vec{V} = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + fy)\vec{e}_y \tag{2.5}$$

et le contour fermé ABCDA précisé sur la figure.



Vérifier le théorème de Stokes en calculant la circulation de $\vec{V}$ sur ce contour.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} C &= \oint_C \vec{V}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint_C \left((ax+by)dx + (cx+fy)\right) dy \\ &= \int_0^1 axdx + \int_0^1 (c+fy)\, dy + \int_1^0 (ax+b)\, dx + \int_1^0 fydy \\ &= c - b \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}.\overrightarrow{dS} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}.\vec{N}dS$$

et comme :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = (c-b)\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{N} = \vec{e}_z$$

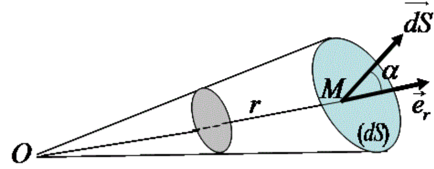
il vient :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V}.\overrightarrow{dS} = \int_0^1 \int_0^1 (c-b)\, dxdy = c - b$$

2.3.6 Angle solide

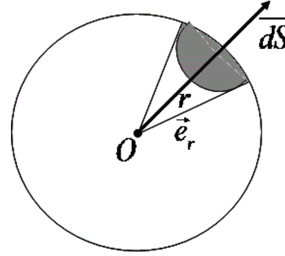
- Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ à partir d'un point donné O est donnée par:

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{e}_r}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$



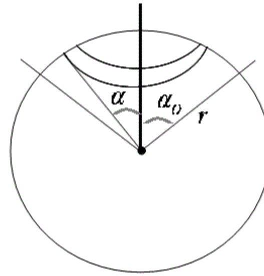
Dans le cas où l'élément dS est pris sur la sphère de centre O et de rayon r, on a tout simplement :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}\vec{N}.\vec{e}_r = \frac{dS}{r^2}$$



Exemple 4.
- Espace entier : $\Omega = \frac{1}{r^2}\iint_S dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$
- Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi$.
- Cône de demi-angle au sommet α_0 :

$$dS = 2\pi r\sin\alpha r d\alpha$$
$$= 2\pi r^2 \sin\alpha d\alpha$$
$$\Omega = \iint_S \frac{dS}{r^2} = \int_0^{\alpha_0} 2\pi\sin\alpha d\alpha$$
$$= 2\pi\left(1-\cos\alpha_0\right)$$



Chapter 3

Loi de Coulomb

3.1 Charges Electriques

L'unité de la charge dans le système international (SI) est le coulomb (de symbole : C). Son nom vient de celui du physicien français Charles de Coulomb. Il est défnit comme étant la quantité d'électricité traversant une section d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité de 1 *ampère* pendant 1 *seconde* ($1C = 1s{\cdot}A$). Elle est équivalente à $6,24150962915265 \times 10^{18}$ charges élémentaires.

La charge élémentaire $|e|$ vaut $|e| \approx 1,602 \times 10^{-19}C$. La charge de l'électron vaut $-|e|$, celle du proton est la plus petite charge électrique qu'on ait pu isoler jusqu'à présent $+|e|$. Ainsi toute charge q est considérée multiple de la charge élémentaire. Les atomes sont constitués de particules chargées à savoir les électrons et les protons dont les propriétés sont données par:

	Charge	Masse
Proton	$q_p = +1,602 \times 10^{-19}C$	$m_p = 1,67{\cdot}10^{-24}kg$
Electron	$q_e = -1,602 \times 10^{-19}C$	$m_e = 9,1{\cdot}10^{-31}kg$

(3.1)

Il s'agit aussi, et essentiellement, de faire une distinction entre deux types de charges.

a) **Les charges ponctuelles**

Se sont des charges supposées de dimension nulle par analogie avec la notion du point matériel en mécanique.

b) **Les distributions continues de charge**

Se sont des charges macroscopiques obtenues en faisant la sommation (intégral) sur toutes les charges infinitésimales dq. Nous avons alors

- Densité de charge linéique (sur un fil):

$$\lambda = \frac{dq}{dl}(C.m^{-1})$$
$$q = \int \lambda dl$$

- Densité surfacique (sur une surface)

$$\sigma = \frac{dq}{dS}(C.m^{-2})$$
$$q = \int\int \sigma dS$$

- Densité volumique (sur un volume)

$$\rho = \frac{dq}{dV}(C.m^{-3})$$
$$q = \int\int\int \rho dV$$

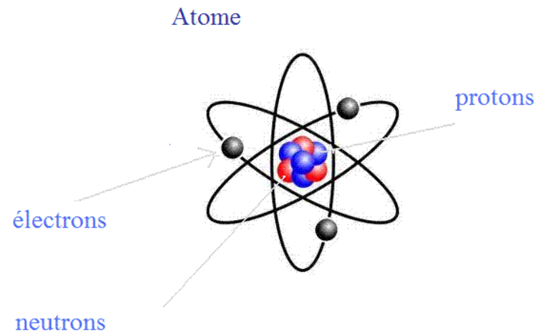
3.2 Constitution de la matière

L'étude des particules élémentaires représente une direction, très riche et prometteuse, de la science contemporaine à travers ses idées et implications physiques très importantes. Les particules élémentaires sont définies comme étant les constituants fondamentaux de l'univers. Ces particules subatomiques sont dites « élémentaires » parce qu'elles ne résultent pas de l'interaction d'autres particules plus « petites ». A la base de cette définition, un atome n'est pas considéré être une particule élémentaire car il est constitué d'électrons, de protons et de neutrons. Ces deux derniers, désignés par le terme générique, nucléons, car formant le noyau atomique, ne sont pas non plus élémentaires car ils sont constitués de quarks. En revanche, en se

basant sur les derniers résultats de la recherche en physique, les électrons et les quarks sont des particules élémentaires car ils ne sont constitués d'aucune autre particule.

Dans ce qui suit, nous commençons tout d'abord par donner un aperçu sur la matière.

3.2.1 Atome:



3.2.2 L'électron:

L'éléctron est une particule élémentaire appartenant à la famille des leptons. Il a une charge électrique négative de $(-e) = -1,610^{-19}C$.Cette charge est considérée être la charge électrique élémentaire. Avec les protons et les neutrons, l'éléctron forme les differents atoms connus. Sa masse est de l'ordre de $m_e = 9,1.10^{-31}kg$, soit $0,511.MeV$.

3.2.3 Le proton:

De charge positive $(+e) = 1,610^{-19}C$ et de masse $m_p = 1,672\ 10^{-27}kg = 1836m_e$

Le proton est présent dans le noyau des atomes. Il n'est pas une particule élémentaire, étant composé de d'autres particules appelées quarks.

3.2.4 Le neutron:

Le neutron est une particule subatomique de charge nulle et de masse voisine de celle du proton, $m_n = 1,675\ 10^{-27}kg$. Le neutron est présent dans le

noyau des atomes. Si le nombre de protons d'un noyau détermine son élément chimique, le nombre de neutrons détermine son isotope. Ajoutons aussi que le neutron n'est pas une particule élémentaire, étant composé lui aussi de quarks.

Remarque:

La charge est une grandeur scalaire pouvant prendre des valeurs positives ou négatives.

3.3 Conducteurs et isolants

Dans les isolants ou diélectriques, la charge reste localisée là où elle est créee. Elle ne peut pas se déplacer (bois, papier, verre, ...). Dans les conducteurs, la charge électrique peut se déplacer (métaux, électroytes, sol,...). Dans un conducteur solide, comme le cuivre, les ions positives Cu^+ sont disposés régulièrement (réseau cristallin) et entre eux, se déplacent des électrons libres ou électrons de conduction.

Dans un isolant, les électrons sont fortement liés aux atomes, il n'y a pas d'électrons libres.

Les gaz sont formés de molècules neutres, ce sont des isolants. Mais sous l'action de champs électriques intenses ou à des températures elevées, il ya isonisation des molècules et apparition d'ions positifs et négatifs: Les gaz ionisés sont des conducteurs.

3.4 Répartition des charges

3.4.1 Charge ponctuelle.

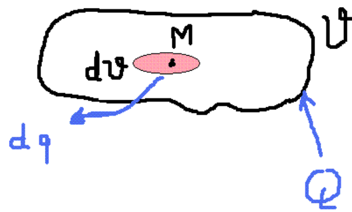
Une charge ponctuelle possède une dimension négligeable par rapport aux distances auquelles on se place pour l'étudier. Ainsi, la charge du proton est localisée dans une sphère de rayon $R_p \simeq 10^{-13}m$. Pour l'électron $R_e \simeq 3.10^{-13}m$. A des distances supérieures à $10^{-10}m$, on pourra considérer ces charges comme ponctuelles (Analogie avec le point matériel de la mécanique du point).

3.4.2 Distribution continues de charges

Volumique

La charge totale Q est répartie dans un volume v.

volu



$_2 0.pdf$

Un volume infinitésimale dv en M contient une charge dq telle que

$$dq = \rho(M)dv$$

avec $\rho(M)$ la densité volumique de charge en C/m^3. La charge totale st donnée par

$$Q = \int\int\int_v \rho dv$$

Si pour tout point M on a $\rho(M) = constante$, alors la charge est uniforme et $Q = \rho v$.

Surfacique

La charge totale Q est répartie sur une surface S avec une densité surfacique

$$\sigma(M) = \frac{dq}{dS} \text{ en } C/m^2$$

La charge totale est donnée par

$$Q = \int\int_S \sigma dS$$

Linéique

La charge totale Q est répartie sur une ligne avec une densité linéique

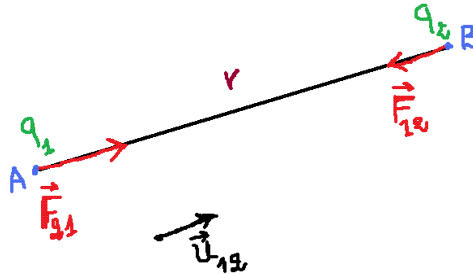
$$\lambda(M) = \frac{dq}{dl} \text{ en } C/m$$

On a

$$Q = \int_C \lambda dl$$

3.5 Loi de Coulomb

Soient deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 immobiles, placées en deux points différents A et B séparés d'une distance $AB = r$.



Les deux charges q_1 et q_2 placées en deux points A et B distants de r exercent l'une sur l'autre une force à préciser. Ces charges peuvent être positives ou négatives avec la régle:

Régle:

Deux charges sont répulsives ou attractives selon qu'elles sont de même signes ou de signes opposées respectivement.

Loi:

L'intensité de la force électrostatique entre deux charges électriques est proportionnelle au produit des deux charges et est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux charges. La force est portée par la droite passant par les deux charges. Formellement nous pouvons écrire:

$$\overrightarrow{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u}, \qquad \overrightarrow{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \tag{3.2}$$

avec

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 S.I. \tag{3.3}$$

Ls deux charges q_1 et q_2 sont algébriques et $\overrightarrow{u}_{12}$ est le vecteur unitaire de la droite AB. ε_0 est la permitivité du vide. D'après le principe de l'action et de la réaction

$$\overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21} \tag{3.4}$$

Remarques:

- La loi de Coulomb n'est valable de façon stricte que dans le cadre de l'électrostatique (charges immobiles dans un repère R)

- Pour des distances $r < 10^{-12}m$, les charges ne peuvent plus être considérées ponctuelles, la loi de Coulomb ne s'applique plus.

Unité :

Force $F(Newton : N)$

charges q_i $(Coulomb : C)$

distance r $(mètre: m)$

- Le coulomb est l'unité de la charge électrique dans le système d'unité iternational (SI)

- Unité de ε_0: $[\varepsilon_0]$=$C^2m^{-2}N^{-1}$.

Application:

La force de gravitation entre deux masses ponctuelles est donnée par

$$\overrightarrow{F}_g = -g\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{12}, \qquad g = 6,6710^{-11}SI$$

Comparer deux forces, une électrostatique et l'autre gravitationnelle s'exerçant entre deux électrons

$$F_g = g\frac{m^2}{r^2}$$
$$F_e = k\frac{e^2}{r^2}$$

Ce qui conduit à

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k}{g}\frac{e^2}{m^2} = 4.10^{42}$$

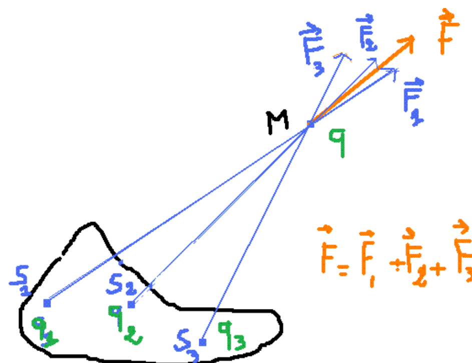
Les forces de gravitation sont en général négligeables devant les forces électriques.

3.6 Principe de superposition

Considérons une distribution (D) de charges ponctuelles q_i situées en des points S_i et soit $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ la force électrostatique exercée par l'ensemble des charges de (D) sur une charge q située en un point M. L'expérience indique (A admettre comme un principe) que cette force est égale à la somme des forces $\overrightarrow{F}_i$ qu'exerceraient, séparément sur la charge q, chacune des charges q_i prise isolément.

$$\overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F}_i = \sum_i \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} \right)$$

avec $r_i = S_iM$ et $\overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{S_iM}}{r}$.



Chapter 4

Champ Electrostatique dans le vide

4.1 Force et champ éléctrostatique

Soit $\Re$ une région de l'espace. On dit qu'un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ existe dans $\Re$ si une charge électrique q (passive) placée en un point de cette région est soumise à l'action d'une force de nature électrostatique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$.

Remarque:

On suppose que l'introduction de la charge q ne modifie pas le champ $\overrightarrow{E}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q}$$

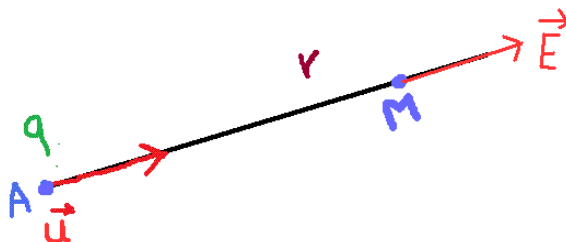
♣ Si $q > 0$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ one le même support et le même sens

♣ Si $q < 0$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ one le même support et des sens opposés.

4.2 Champ créé par une charge ponctuelle unique

Une charge active q, placée en A, crée un champ $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'espace

cre



$_2 3.pdf$

Plaçons en M une charge passive q'. Elle est soumise à l'action d'une force

$$\overrightarrow{F}' = k\frac{qq'}{r^2}\overrightarrow{u} \quad (4.1)$$

$$= q'\overrightarrow{E} \quad (4.2)$$

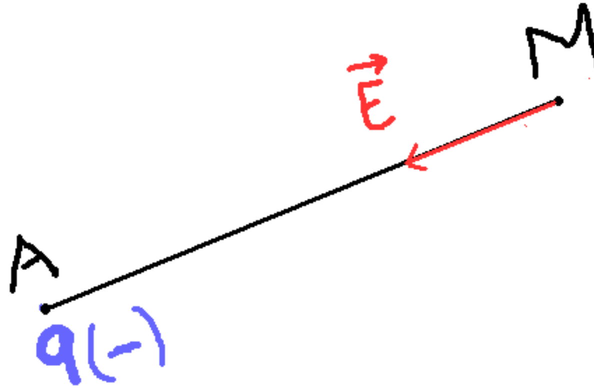
D'où

$$\overrightarrow{E} = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u} \quad (4.3)$$

Remarques:

C'est le champ créé en M par la charge q.

■ Si $q < 0$, $\overrightarrow{E}$ dirigé vers q



■ Si $r \nearrow$, $\overrightarrow{E} \searrow$

■ Si $r \to \infty$, $\overrightarrow{E} \to 0$

■ Si $r \to 0$, On ne peut plus considérer la charge comme ponctuelle:

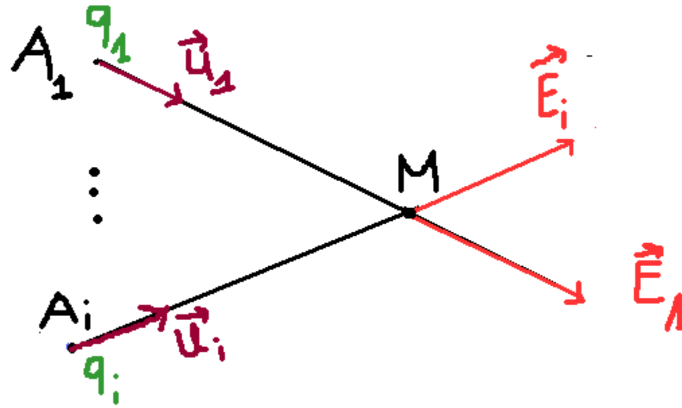
Les lois de l'électrostatique ne seront plus valable, on doit appliquer d'autres lois liées à l'infiniment petit (Mécanique quantique: cours assuré à partir de S3)

4.3 Champ créé par plusieurs charges ponctuelles

Chaque charge q_i créé en M un champ

$$\overrightarrow{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}$$

avec $r_i = A_iM$, $\overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{A_iM}}{A_iM}$



Le champ résultant en M:

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}$$

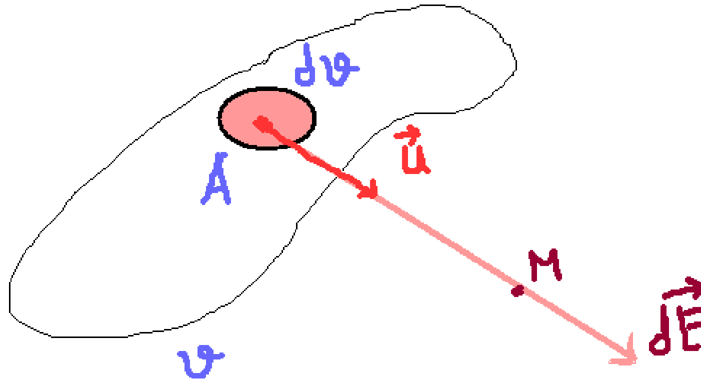
4.4 Champ créé par une distribution continue de charges

On se ramène à des charges ponctuelles dq.

4.4.1 Distribution volumique de charges

Un élément de volume dv en A porte la charge $dq = \rho dv$ assimilable à une charge ponctuelle dq créé en M un champ

$$d\overrightarrow{E} = \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}$$



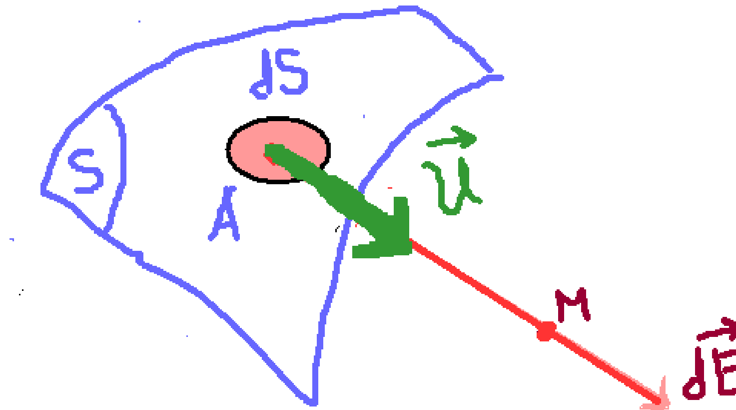
Le champ créé en M par toutes les charges contenues dans v sera

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int_v \frac{\rho dv}{r^2} \overrightarrow{u}$$

4.4.2 Distribution surfacique de charges

Soit dq une charge élémentaire créé en M

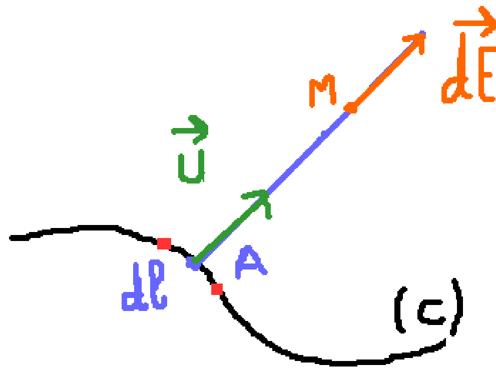
$$d\overrightarrow{E} = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \overrightarrow{u}$$



$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int_S \frac{\sigma ds}{r^2} \overrightarrow{u}$$

4.4.3 Distribution linéique de charges

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{E} &= \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(c)} \frac{\lambda dl}{r^2}\overrightarrow{u} \end{aligned}$$



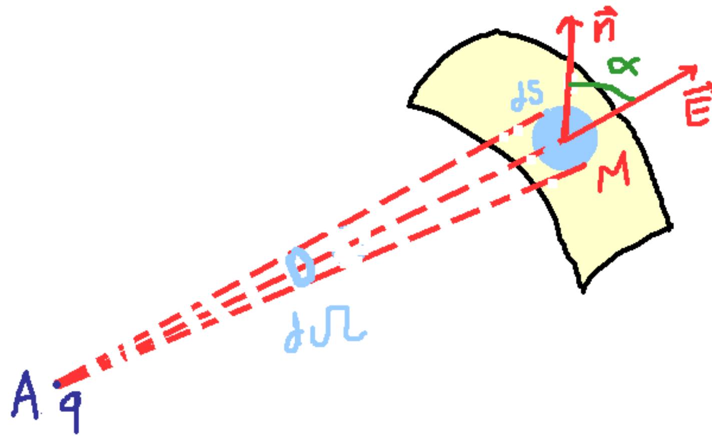
4.5 Flux du champ éléctrostatique

Le champ $\overrightarrow{E}$ est créé par une charge ponctuelle q placée en A.

4.5.1 Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface élémentaire

La charge q en A va créer $\overrightarrow{E}$ en M. Le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers dS est par définition:

$$\begin{aligned} d\phi &= \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.dS \\ &= \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} \end{aligned}$$



$$d\phi = EdS\cos\alpha$$

or

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

avec $r = AM$.D′où

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

Définition:

La quantité $\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$ s'appelle *angle solide* $d\Omega$ sous lequel, depuis le point A, on voit la surface dS.

d'où

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Remarques:

1) $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à la surface (Il est orienté vers l'extérieur de S)

Le flux de $\overrightarrow{E}$ est appelé flux sortant.

2) Si $\overrightarrow{n}$ était orienté en sens inverse nous aurions

$$d\phi = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

4.5.2 Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface finie non fermée

Le flux total de $\overrightarrow{E}$ à travers S est

$$\phi = \int\int_S d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\int_S d\Omega$$

Si $\Omega = \int\int_S d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de A, alors

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

4.6 Théorème de Gauss

4.6.1 Présentation

Soit un ensembe de charges, ponctuelles ou non, et une surface fermée S. Les charges q_{ext}, situées à l'extérieur de S, créent un champ électrostatique dont le flux à travers S est nul. Les charges q_{int}, à l'intérieur de S, créent un champ dont le flux est égal à $\frac{q_{int}}{\epsilon_0}$. D'où

$$\phi = \int\int_{S\text{ fermée}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Enoncé:

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de S.

4.6.2 Cas d'une distribution continue de charges

$$\sum q_{int} = \iiint_v \rho dv$$

où v est le volume à l'intérieur de la surface S. D'où

$$\phi = \int\int_{S\text{ fermée}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho dv$$

4.7 Expression locale du théorème de Gauss

Soit une destribution de charge (D) contenue dans un volume v délimité par une surface fermée S. Soit ρ la densité volumique de charge.

Le volume v contient la charge totale q de sorte que

$$q = \iiint_v \rho dv$$

Le théorème de Green Ostrogradsky implique:

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_v \operatorname{div} \overrightarrow{E}.dv$$

Le théorème de Gauss s'écrit

$$\iiint_v \operatorname{div} \overrightarrow{E}.dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho dv$$

d'où

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Remarque:

Dans les régions où il n'y a pas de charges électriques $\rho = 0, \operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0$, le flux électrique est conservatif.

Démarche à suivre pour appliquer le théorème de Gauss:

Le théorème de Gauss permet de calculer facilement le champ créé par une distribution de charges possédant une symétrie soit cylindrique, soit sphérique. La démarche à suivre est la suivante:

a) Choisir une surface fermée, à travers laquelle on claculera le flux, et qui a la même symétrie que le corps étudié.

b) Calculer indépendament:

i) la charge totale contenue dans cette surface

ii) le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers cette surface

c) Appliquer la formule du théorème de Gauss

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Chapter 5

Potentiel électrostatique dans le vide

5.1 Potentiel créé par une charge ponctuelle unique

5.1.1 Définition:

La présence d'une charge ponctuelle q au point M donne lieu à deux comportements en un point M' de l'espace environnant :

– Un comportement vectoriel: *Le champ électrostatique*

$$\overrightarrow{E}_M = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}, \tag{5.1}$$

– Un comportement scalaire: *le potentiel électrostatique*

$$V_M = k\frac{q}{r} + cte. \tag{5.2}$$

En effet, étant donné que $\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{1}{r}) = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ et $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ on aura

$$\overrightarrow{E}_M = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}, \tag{5.3}$$

$$= k\frac{q}{r^3}\overrightarrow{r}, \tag{5.4}$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}) \tag{5.5}$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \tag{5.6}$$

Donc $V = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} + const.$

5.1.2 Propriétés:

a) Le champs $\overrightarrow{E}$ s'exprime en terme du potentiel V comme:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V \tag{5.7}$$

avec

$$dV = -\overrightarrow{E}.d\overrightarrow{M}. \tag{5.8}$$

b) Le potentiel V est toujours défini à une constante près.
En effet,

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = \overrightarrow{-\nabla}(V + cte) \tag{5.9}$$

c) En pratique c'est la d.d.p. (différentielle de potentiel) qui a un sens physique et non pas V (puisqu'il est toujours défini à une constante arbitraire près)
d) Le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.
e) L'unité du potentiel est le *volt*
f) Composantes de $\overrightarrow{E}$:
En coordonnées cartésiennes:

$$\overrightarrow{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \tag{5.10}$$

En coordonnées cylindriques $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{k}\right)$

$$\overrightarrow{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \tag{5.11}$$

Lignes de champ

Les lignes de champ sont des courbes tangentes en chaque point au champ $\overrightarrow{E}_M$.Elles représentent l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace.

Règles pour la représentation graphique:

1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.

2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge $+2q$ produit deux fois plus de lignes qu'en absorbe une charge $-q$).

3. Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.

4. Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.

5. En s'éloignant de la distribution de charges, les lignes de champ semblent provenir d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge nette de la distribution.

5.2 Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

Les charges $\{q_1, q_{2,...,}q_n\} \overset{\text{créent au point } M}{\rightsquigarrow} \left\{\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{E}_2, ..., \overrightarrow{E}_n\right\}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}_{Total} &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E}_i \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\overrightarrow{r}_i}{r_i^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \overrightarrow{\text{grad}} \left\{\frac{-1}{r_i}\right\} \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Le potentiel créé en M est

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} + const.$$

5.3 Potentiel créé par une distributon continue de charges

5.3.1 Distribution volumique:

$$\sum_i \frac{q_i}{r_i} \to \iiint\limits_v \frac{\rho dv}{r} : V = k \iiint\limits_v \frac{\rho dv}{r} + cst. \tag{5.13}$$

5.3.2 Distribution surfacique:

$$\sum_i \frac{q_i}{r_i} \to \iiint\limits_s \frac{\sigma ds}{r} : V = \iiint\limits_s \frac{\sigma ds}{r} + cst. \tag{5.14}$$

5.3.3 Distribution linéique:

$$\sum_i \frac{q_i}{r_i} \to \iiint\limits_C \frac{\lambda dl}{r} : V = \iiint\limits_C \frac{\lambda dl}{r} + cst.$$

5.4 Quelques définitions importantes

5.4.1 Les surfaces équipotentielles

Définition:

Une surface équipotentielle est une région où la valeur du potentiel électrique est la même en tout point, c'est à dire que $V(x,y,z) = cte$.

En effet, sur ces surfaces, on a :

$$\begin{aligned} dV &= \left(\overrightarrow{\nabla} V\right) d\overrightarrow{M}. \\ &= -\overrightarrow{E}_M . d\overrightarrow{M}. \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui signifie:

$$\overrightarrow{E}_M \perp d\overrightarrow{M}.$$

Caractéristiques des équipotentielles:

- Le potentiel électrique est une constante en tout point de la surface.
- Le champ électrique est perpendiculaire à la surface équipotentielle.
- Le sens du champ électrique défini le sens où il y a une chute de potentiel.
- Plus les équipotentielles sont rapprochées, plus le champ électrique est de module élevé.

5.4.2 Travail d'une force électrostatique

Soit $\overrightarrow{E}$ un champ dans une région de l'espace. Une charge passive q' dans ce champ est soumise à la foce $\overrightarrow{F} = q'\overrightarrow{E}$. Si q' subie un déplacement $\overrightarrow{dl}$ le travail sera:

$$\begin{aligned} d\tau &= q'\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} \\ &= -q'dV \end{aligned}$$

5.4.3 Equation de Poisson et de Laplace

Rappelons que le théorème de Gauss se traduit par la propriété locale

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V$ on a

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\nabla}V\right) = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Or

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\overrightarrow{\nabla}V\right) &= \Delta V \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V \end{aligned}$$

Ceci implique l'équation suivante

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

appelée équation de Poisson.
Si $\rho = 0$ (absence de charges)

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$$

alors le champ $\overrightarrow{E}$ est à flux conservatif ce qui implique

$$\Delta V = 0$$

dite équation de Laplace.

Chapter 6

Conducteurs en équilibre

6.1 Loi de conservation de la charge

Les conducteurs sont des milieux contenant des charges libres (positives ou négatives) pouvant être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique. Parmi les conducteurs, on peut citer les métaux, les semiconducteurs, les électrolytes ou encore les gaz ionisés.

À l'intérieur d'un système isolé constitué par plusieurs conducteurs, des déplacements de charges peuvent s'opérer :

– par frottement de corps non chargés préalablement,

– par contact de deux corps, si l'un des deux corps ou les deux sont chargés initialement,

– par l'influence de corps chargés sur un corps isolé placé en leur voisinage

Énoncé:

Dans un système isolé, la charge électrique se conserve :

$$\sum q = 0 \tag{6.1}$$

Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

6.2 Equilibre électrostatique: Théorème de Coulomb

On définit la condition d'équilibre d'un conducteur comme impliquant l'immobilité des charges contenues à l'intérieur de ce conducteur.

Cela a pour conséquence qu'en tout point intérieur au corps, le champ $\vec{E}_{int}$ est nul (de sorte que $\vec{E}_{int} = q\ \vec{E}_{int} = \overrightarrow{0}$).

L'équation locale :

$$\text{div}\ \vec{E}_{int} = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} \tag{6.2}$$

entraîne que l'équilibre s'exprime finalement par :

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \qquad \rho_{int} = 0 \tag{6.3}$$

Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et le champ électrique à l'intérieur y est toujours nul.

Deux cas peuvent se présenter suivant que le corps est neutre ou chargé

■ Corps conducteur neutre

On a :

$$\rho_{int} = 0 \quad (en \quad volume) \quad \sigma = 0 (en\ surface)$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = cte = V_0$$

– Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel, et la surface qui le limite est au même potentiel.

$$\overrightarrow{\text{grad}} V_{int} = \vec{0} \ \Rightarrow \Delta V_{int} = 0$$

$V_S = V_0$
$\rho_{int} = 0$
$\vec{E}_{int} = \vec{0}$
$\vec{V}_{int} = \vec{V}_0$
$\sigma = 0$

L'équation de Laplace, valable dans l'espace vide où $\rho = 0$, est donc applicable aux conducteurs en équilibre.

– À l'extérieur du corps, le théorème de Gauss entraîne que $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$.

■ Corps conducteur chargé

La condition d'équilibre des porteurs de charge entraîne toujours :

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ d'où $\rho_i = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$ d'une part et $V_{int} = cte = V_0$ d'autre part.

La charge ne peut se répartir que sur la surface, celle-ci est une surface équipotentielle.Les conditions de passage du champ $\vec{E}$ à

travers la surface donnent :

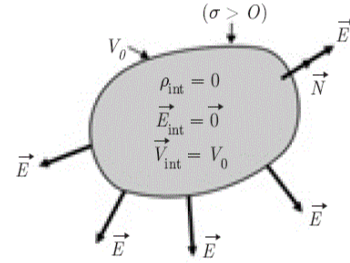
$a)\vec{E}_{T\ ext} = \vec{E}_{T\ int} = \vec{0}$

Parconséquent, au voisinage de la surface,

$\vec{E}$ ne peut être que normal à la surface.

$b)(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}).\vec{N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante.



Comme $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, on a:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{N} \tag{6.4}$$

Si $\sigma \rangle$ 0,le champ est dirigé vers l'extérieur,

Si $\sigma \langle$ 0,il est dirigé vers l'intérieur.

Cette relation, qui traduit que les lignes de champ sont normales à la surface

du conducteur, constitue *le théorème de Coulomb.*

■ **Conséquences**

– Dans le cas d'un conducteur sphérique chargé, le champ sur la surface a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{e_r} \tag{6.5}$$

comme si la charge Q était placée au centre de la sphère.

– Comme $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, on en déduit que, pour une charge Q donnée, la densité

surfacique σ est d'autant plus élevée que le rayon de courbure est petit (pouvoir des pointes : sur une pointe, σ et par conséquent le champ $\vec{E}$ peuvent atteindre des valeurs très élevées).

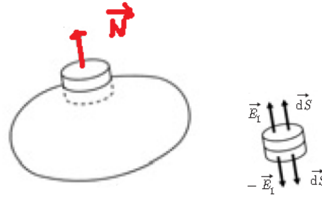
6.2.1 Pression Electrostatique

Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ. Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure donne:

$$E_1 ds + E_1 ds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément dS seul est donc:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{N}$$



Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}$. On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur (conducteur privé de dS) est:

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{N}$$

L'élément σdS « ne voyant pas » son propre champ, ne subit que l'action du champ $\vec{E}_2$. Il en résulte une force :

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \vec{N}$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \tag{6.6}$$

ou encore

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{6.7}$$

où E est la norme du champ à la surface du conducteur.

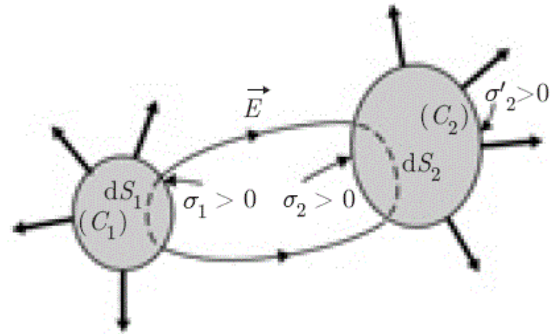
$d\vec{F}$ est toujours normale à la surface du conducteur, et dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de la charge.

6.2.2 Influence de deux conducteurs chargés. Théorème de Faraday

Influence partielle

Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2). On suppose que, initialement (C_1) est chargé avec une densité $\sigma_1 > 0$, et C_2 est neutre.

Dès que l'on approche (C_1) de (C_2),
il apparaît sur la surface de (C_2) :
une densité de charge $\sigma_2^{'} < 0$ sur
la partie faisant face à (C_1) et une
densité $\sigma_2^{'}>0$ sur la partie opposée.
Les densités sont de signes contraires
pour assurer la neutralité de (C_2).



Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure : elles partent de (C_1) perpendiculaires à la surface et aboutissent à (C_2) également perpendiculaires à la surface. On considère le tube de champ de section dS_1 sur (C_1) : il va délimiter sur (C_2) une section dS_2. Le flux sortant de ce tube est nul, car aucun flux ne sort de la paroi latérale (E tangent à la paroi) ni des calottes dS_1, dS_2 ($\overrightarrow{E}$ nul à l'intérieur des conducteurs).

Le théorème de Gauss appliqué à ce tube donne :

$$\oint\oint_{tube} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

soit:

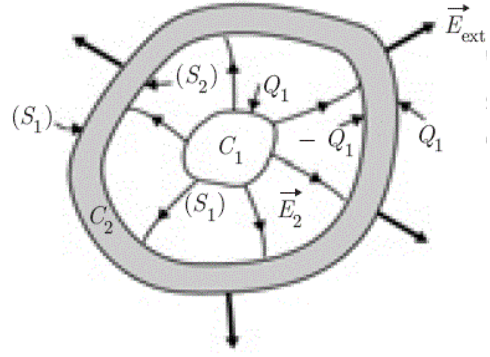
$$\sum q_i = \sigma_2 dS_1 + \sigma_1 dS_2$$

Les charges $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$qui se font face sur deux éléments de surface, correspondants sont égales et opposées (théorème de Faraday).

L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à (C_2).

Influence totale

Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2).



On peut alors écrire:

$Q_1 = \int_{(S_1)} \sigma_1 dS_1 = -\int_{(S_2)} \sigma_2 dS_2$

Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées.

On peut donc résumer la situation de la manière suivante :

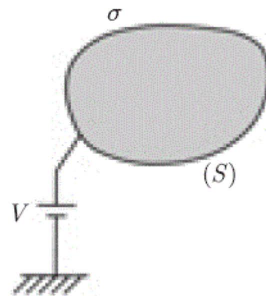
- dans la partie massive de (C_1) : $\vec{E}_1 = \vec{0}$,
- sur la surface de (C_1) : charge $Q_1 > 0$ créant $\vec{E}_2$,
- sur la surface interne de (C_2) : charge $-Q_1$,
- dans la partie massive de (C_2) : $E = 0$,
- sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge Q_1 pour assurer la neutralité de (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),
- à l'extérieur des deux conducteurs : le champ $\vec{E}_{ext}$ est celui créé par la seule charge Q_1 portée par la surface externe de (C_2).

6.2.3 Capacité d'un conducteur unique

Soit un conducteur porté au potentiel V.

Il apparaît alors sur sa surface, une charge q définie par:

$q = \oint\oint_{(S)} \sigma dS$



Si le potentiel devient V_1, puis V_2, puis V_3, la charge devient q_1, q_2, q_3.

Les relations charge-potentiel étant linéaires (par exemple, l'équation locale $V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ est linéaire car si on multiplie ρ par un facteur A, le potentiel

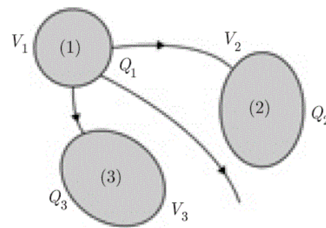
sera lui aussi multiplié par A), on peut écrire :

$$\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_3}{V_3}$$

Le coefficient de proportionnalité C, indépendant de q et de V, est appelé la capacité du corps conducteur. Il se mesure en farad (F), si q est en coulomb et V en volt.

6.2.4 Système de n conducteurs en équilibre

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs. Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.



1er état : conducteur $n°1$ au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.

2e état : conducteur $n°2$ au potentiel V_2, les autres au potentiel 0.

3e état : conducteur $n°3$ au potentiel V_3, les autres au potentiel 0.

1er*état* : Q_{11}, Q_{21}, Q_{31} étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2, 3, on a :

$$Q_{11} = C_{11}V_1 \qquad C_{11} > 0$$
$$Q_{21} = C_{21}V_1 \quad C_{21} < 0 \quad car \quad charge \ \ Q_{21} < 0$$
$$Q_{31} = C_{31}V_1 \quad C_{31} < 0 \ \ car \ \ charge \ \ Q_{31} < 0$$

avec

$$|C_{21} + C_{31}| \ \preceq C11 \qquad \text{(influence partielle)}$$

2e*état* :

$$Q_{12} = C_{12}V_2$$
$$Q_{22} = C_{22}V_2$$
$$Q_{32} = C_{32}V_2$$

3e*état* :

$$Q_{13} = C_{13}V_3$$
$$Q_{23} = C_{23}V_3$$
$$Q_{33} = C_{33}V_3$$

Superposition des potentiels :

$$V_1 + 0 + 0 = V_1$$
$$0 + V_2 + 0 = V2$$
$$0 + 0 + V_3 = V_3$$

Superposition des charges :

$$Q1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$
$$Q2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$
$$Q3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

constitue la matrice des coefficients d'influence du système des trois conducteurs.

On peut généraliser la relation entre charges et potentiels à un système de n conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$[Q_i] = [C_{ij}]\,[V_j] \tag{6.8}$$

où les indices i et j varient entre 1 et n. Cette écriture signifie que, pour chaque valeur de i, il faut sommer cette expression sur j.

Propriétés de la matrice C :

- elle est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$ (identité de Gauss),

- les termes diagonaux sont positifs : $C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité,

- les termes non diagonaux sont négatifs : $C_{ij} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

■ Cas particulier d'un système de deux conducteurs en influence totale

On a :

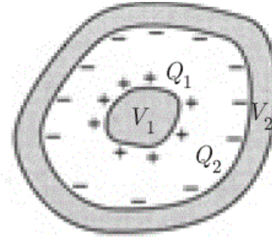
$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \quad avec \quad C_{21} = C_{12}$$

Si le corps (2) entoure le corps (1), l'influence est totale, on a alors :

$$Q_2 = -Q_1$$

$$\Rightarrow C_{12}V_1 + C_{22}V_2 = -C_{11}V_1 - C_{12}V_{22}$$



quels que soient V_1et V_2.

On en déduit :

$$C_{11} = C_{22} = -C_{12}$$

En posant $C_{11} = C$, on peut écrire :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad (6.9)$$

$$Q_2 = C(V_2 - V_1) \quad (6.10)$$

Le système constitue un condensateur et C représente sa capacité. Dans la recherche des coefficients d'influence d'un système de conducteurs, il arrive que les équations soient plus faciles à écrire en exprimant les potentiels en fonction des charges $V = f(Q_i)$, plutôt que les charges en fonction des potentiels $Q = g(V_i)$. On arrive à une relation matricielle de la forme :

$$[V_i] = [D_{ij}]\,[Q_j]$$

où la matrice D est la matrice inverse de la matrice C des coefficients d'influence. Pour obtenir ces derniers, il suffira donc d'inverser la matrice D, où l'on considère le cas d'un système de trois sphères conductrices.

Exemple : *Sphères conductrices en influence*

Soit deux sphères conductrices chargées,

de rayons R_1 et R_2, dont lescentres sont distants de d, tel que d

R_1 , R_2 . On demande de calculer

les coefficients de capacité C_{11}, C_{22} et les coefficients d'influence C_{12} et C_{21} d'un tel système.

La superposition des états d'équilibre permet d'écrire :

$$\begin{cases} V_1 = D_{11}Q_1 + D_{12}Q_2 \\ V_2 = D_{21}Q_1 + D_{22}Q_2 \end{cases}$$

La distance d étant très grande comparée à R_1 et R_2, on peut assimiler le potentiel de (S_1) dû à (S_2) au potentiel créé par (S_2) au centre O_1, soit $\frac{KQ_2}{d}$.

En faisant de même pour le potentiel de (S_2) dû à (S_1), on peut écrire :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{d} \\ V_1 = \frac{KQ_2}{d} + \frac{KQ_1}{R_1} \end{cases} \Rightarrow D = K \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}$$

La matrice C des coefficients de capacité et d'influence est alors obtenue en prenant l'inverse de la matrice D. On trouve :

$$C_{11} = \frac{R_1/K}{1 - R_1R_2/d^2} \qquad C_{22} = \frac{R_2/K}{1 - R_1R_2/d^2}$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{-R_1R_2/K}{d\,(1 - R_1R_2/d^2)}$$

On vérifie bien que :

- la matrice C est symétrique :$C_{12} = C_{21}$,
- C_{11} et C_{22} sont positifs.
- C_{12} et C_{21} sont négatifs.

En faisant tendre d vers l'infini, on retrouve la capacité de la sphère $S1$ seule,

soit :

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

6.2.5 Capacité d'un condensateur

Soit :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{-Q}{V_2 - V_1} \tag{6.11}$$

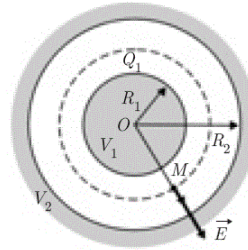
on voit que la connaissance de la charge Q_1 (ou Q_2) et de la différence de potentiel (d.d.p.) $(V_1 - V_2)$ permet de déterminer la capacité C du condensateur.

Lorsque des considérations de symétrie permettent d'appliquer le théorème de Gauss, le calcul de la capacité C peut se faire très aisément.

■ Condensateur sphérique

Les deux armatures du condensateur sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2.

Pour un point M, situé entre les deux armatures et telque OM=r, on peut écrire:



$\vec{E} = K\frac{Q_1}{r^2}\vec{e}_r$

$dV = -Edr \Rightarrow V = K\frac{Q_1}{r} + cte$

La d.d.p. entre les deux armatures est donc :

$$V_1 - V_2 = kQ1\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

et comme $C = \frac{Q1}{V_1 - V_2}$, il vient :

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} \tag{6.12}$$

Le conducteur sphérique de rayon R_1 pris tout seul, peut être considéré comme une armature d'un condensateur sphérique dont la deuxième armature de rayon R_2 est rejetée à l'infini. En faisant tendre R_2 vers l'infini dans l'expression précédente, on retrouve bien la capacité d'un conducteur sphérique $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$.

■ Condensateur cylindrique

Les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux. Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire:

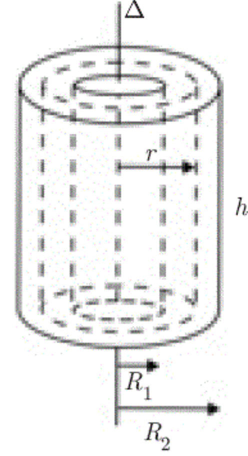
$E2\pi rh = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi r\varepsilon_0 h}\vec{e}_r$

On en déduit:

$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$

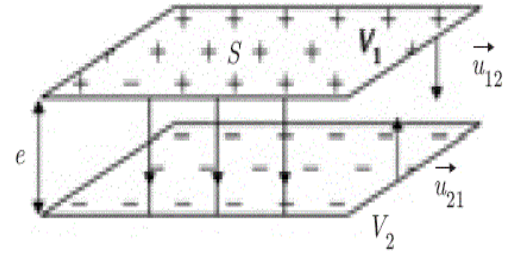
D′où la capacité:

$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$



■ Condensateur plan

Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface S, distants de e. Supposons que la première est chargée positivement d'une densité $+\sigma$ et la deuxième négativement d'une densité $-\sigma$.



Entre les deux armatures, ona:

$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{12}$ pour la 1re armature,

$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{21}$ pour la deuxième.

Le champ total est donc:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_{12}$$

On en déduit :

$$V_1 - V_2 = Ee = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$$

D'où

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \tag{6.13}$$

6.2.6 Association de condensateurs

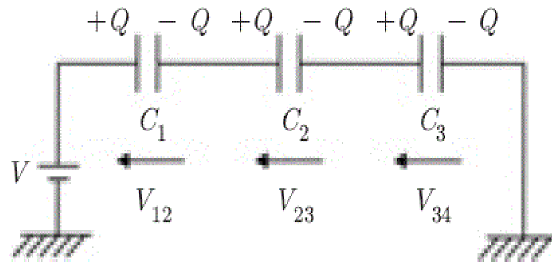
Association en série

La charge Q se conserve:

toutes les armatures de rang impair portent la même charge $+Q$,

toutes les armatures de rang pair la même charge $-Q$:

$Q = C_1 V_{12} = C_2 V_{23} = C_3 V_{34}$



Les d.d.p. s'ajoutent pour donner V :

$$V_{12} + V_{23} + V_{34} = V$$

On en déduit :

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = V = \frac{Q}{C}$$

La capacité équivalente est donc donnée par :

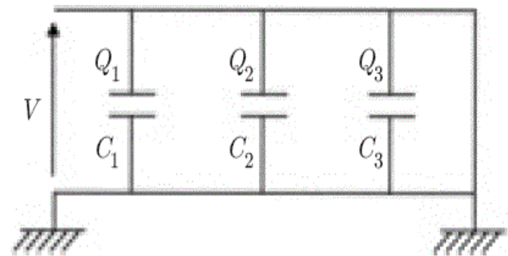
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Association en parallèle

La d.d.p. se conserve;

elle est commune à tous les condensateurs:

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V \\ Q_2 = C_2 V \\ Q_3 = C_3 V \end{cases}$$



Les charges se répartissent différemment,

l'ensemble donnant la charge $Q = CV$.

On en déduit:

$$C_1 V + C_2 V + C_3 V = CV$$

D'où la capacité équivalente :

$$C_1 + C_2 + C_3 = C$$

6.2.7 Méthode de résolution

Une méthode générale de résolution de problèmes électrostatiques en présence de conducteurs, consiste à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, dans le vide entourant le conducteur, en tenant compte des conditions aux limites qui sont généralement : potentiel nul à l'infini et potentiel fixé sur le conducteur lui-même. Cette méthode repose sur le théorème d'unicité, qui exprime que la solution de l'équation de Laplace vérifiant les conditions aux limites données est unique.

Il existe des techniques théoriques ou expérimentales qui permettent de résoudrel'équation de Laplace. L'exposé de ces techniques sort du cadre de cet ouvrage. En dehors du cas général, lorsque les conducteurs ont des formes simples, on peut utiliser les mêmes méthodes que dans le cas des distributions de charges dans le vide, à savoir :

- en partant des expressions élémentaires $d\vec{E}$ et dV relatives à une charge dq et en les intégrant sur la surface des conducteurs,

- en appliquant le théorème de Gauss si des symétries favorables se présentent,

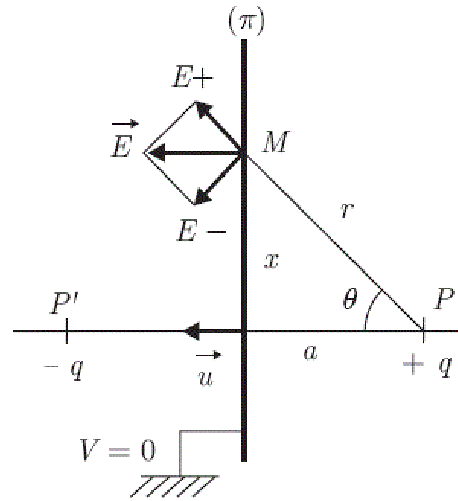
- en utilisant le principe de superposition des états d'équilibre.

On peut parfois utiliser une méthode dite méthode des images : elle consiste à associer au problème A un problème B, sachant que les problèmes $A + B$ et A ont une solution commune dans la région de l'espace concernée, et que $A + B$ sera plus facile à résoudre.

Exemple: *La méthode des images*

On considère un plan conducteur (π), relié au sol, et soumis à l'influence d'une charge ponctuelle $+q$ placée au point P. On demande de déterminer la densité de charge σ apparaissant sur (π), ainsi que la force d'attraction entre $+q$et (π).

Le problème A étant défini ainsi: (charge +q placée en P, plan conducteur (π) au potentiel nul), il faut trouver un problème B qui, associé à A, donne un potentiel nul sur le plan(π).



La solution est évidente: une charge -q placée en P, symétrique de P par rapport à (π), qui sera associée à +q en P en l'absence du ;plan conducteur: l'ensemble des deux charges donnera bien un potentiel nul sur le plan(π).

On dit que la charge $-q$ placée en P est l'image de la charge $+q$ placée en P par rapport au plan (π).

L'introduction de cette image facilite le calcul. En effet, le champ $\vec{E}$ en tout point de (π) s'obtient par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-} = 2\vec{E}_{+} cos\theta \vec{u}$$

$$E = 2K\frac{q}{r^2}\frac{a}{r} = \frac{aq}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \quad r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Théorème de Coulomb:

$$\sigma = \varepsilon_0 E \Rightarrow \sigma = \frac{aq}{2\pi r^3}$$

La force exercée par le plan conducteur (π) sur la charge q est égale à la force exercée par l'image $-q$ sur la charge q

$$\vec{F} = K\frac{q^2}{(2a)^2}\vec{u}$$